

## 2ème Bac comptabilité.

## Leçon n°1 : Continuité d'une fonction numérique.

Notation :  $(I \subset \mathbb{R})$ ,  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$

$f$  et  $g$  deux fonctions numériques,  $f$  définie sur  $I$ .

## I - Continuité : en un point / sur un intervalle.

Déf 1 : Soit  $x_0 \in I$  ;

$$(f \text{ continue en } x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

EXEMPLE :  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$  ;  $x_0 = -1$

on a :  $f(-1) = 3 - 4(-1) + 1 = 8$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 8 = f(-1)$

donc  $f$  est continue en  $x_0 = -1$ .

Déf 2 :

$$(f \text{ continue à gauche en } x_0) \iff \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$(f \text{ continue à droite en } x_0) \iff \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

EXEMPLE 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} ; (x \neq 0) \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

• si  $x < 0$  alors  $|x| = -x$  donc  $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$

donc  $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} (-1) = -1 = f(0)$

donc  $f$  est continue à gauche en 0

• si  $x > 0$  alors  $|x| = x$  donc  $f(x) = \frac{x}{x} = 1$  et on a :

$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} 1 = 1 \neq f(0)$  ; donc  $f$  n'est pas continue à droite en 0.

Prop 1 :

$$(f \text{ continue en } x_0) \iff f \text{ continue à gauche et à droite en } x_0$$

c-à-d :  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$

EXEMPLE : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$f$  n'est pas continue en 0

car :  $f$  non continue à droite en 0

**Prop 2 :**  $(f \text{ continue sur } I) \Leftrightarrow (f \text{ continue en tout point } x_0 \in I)$   
 $f \text{ continue sur } [a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ continue sur } ]a, b[ \\ f \text{ continue à droite en } a \\ f \text{ continue à gauche en } b \end{cases}$

## II. Continuité des fonctions usuelles et opérations.

**Prop 1 :** on note un polynôme :  $P(x)$  ;  $Q(x)$  ...

- un polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- une fonction rationnelle  $f$  ( $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ) est continue sur  $D_f$ .
- La fonction irrationnelle  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

**EXEMPLE :**  $P(x) = 4x^8 - 3x^5 + 4x + 1$

$P$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car : polynôme

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{(x-1)x}$$

$f$  est une fonction rationnelle.  $D_f = \mathbb{R} - \{1, 0\}$

$f$  est continue sur  $D_f = \mathbb{R}^* - \{1\}$ .

**Prop 2 :**

supposons que  $f$  et  $g$  continues sur  $I$ . Soit  $k \in \mathbb{R}$ .

• Les fonctions :  $(f+g)$  ;  $(k \times f)$  et  $(f \times g)$  sont continue sur  $I$ .

**EXEMPLE :**  $f(x) = \sqrt{x} + 6x^2 + 3x - 2$

on a :  $\begin{cases} x \mapsto \sqrt{x} \text{ continue sur } \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto 6x^2 + 3x - 2 \text{ continue sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$

(car continue sur  $\mathbb{R}$ )

donc  $x \mapsto f(x) = \sqrt{x} + (6x^2 + 3x - 2)$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .



Prop 3:

Si  $\begin{cases} f \text{ continue en } x_0 \\ g \text{ continue en } f(x_0) \end{cases}$

alors :  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

II. Image d'un intervalle par une fct continue et strictement monotone.

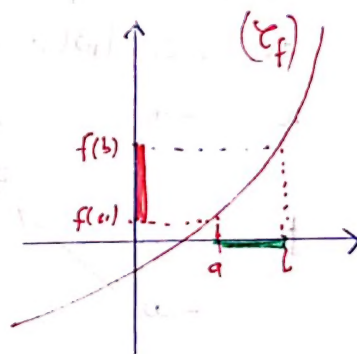
1<sup>er</sup> cas  $f$  continue est strictement  $\nearrow$  (croissante)

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$$

$$f(]a; b]) = ]\lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b)]$$

$$f([a; +\infty[) = [\lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$f(]-\infty; a]) = ]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$$



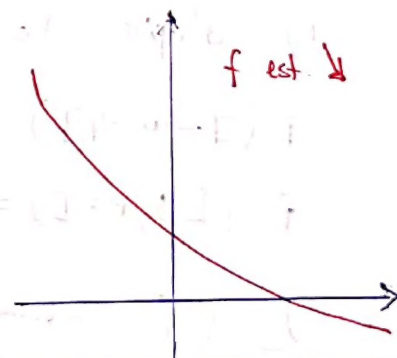
2<sup>ème</sup> cas :  $f$  continue est strictement  $\searrow$  (décroissante)

$$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$$

$$f(]a; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$$

$$f(]a; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$$

$$f(]-\infty; a]) = f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



EXEMPLE :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$  ;  $I = ]-\infty; 3]$  ;  $J = ]3; +\infty[$   
Calculer  $f(I)$  et  $f(J)$

Réponse : on a :  $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 3 = x - 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$f'(x) = x - 3$	-	0	+
$f$	$+\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$

$$f(3) = \frac{1}{2} \times 3^2 - 3 \times 3 + 1 = \frac{9}{2} - 9 + 1 = -\frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

d'après le tableau on a :  
 $f$  est strictement  $\searrow$  sur  $I$

$$\text{donc : } f(I) = f(]-\infty; 3])$$

$$= [f(3); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$$

$$= [-\frac{7}{2}; +\infty[$$

$f$  est strictement  $\nearrow$  sur  $J$  donc :

$$f(J) = f(]3; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

$$= ]-\frac{7}{2}; +\infty[$$

# IV - Théorème des valeurs intermédiaires مبرنة القيم الوسيطة

## Thm 1: [cas générale]

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .  
pour tout  $k \in f(I)$  l'équation  $f(x) = k$  admet une solution dans  $I$ .

EXEMPLE: Soit  $f$  une fonction continue définie par le tableau de variation:

$x$	$-\infty$	$-4$	$1$	$9$	$+\infty$
$f$		$7$		$-2$	
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			$-10$		$-\infty$

1)  $f(]-\infty; -4])$ ;  $f([-4; 1])$   
et  $f([9; +\infty[)$

2) Montrer que l'équation:

a)  $f(x) = 0$  admet une solution dans  $]-\infty; -4]$

b)  $f(x) = -3$  admet une solution dans  $[1; 9]$

Réponse:

1) d'après le tableau on a:

$$f(]-\infty; -4]) = ]-\infty; 7]; \quad f([-4; 1]) = [-10; 7]$$

$$f([9; +\infty[) = ]-\infty; -2]$$

2)  $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } ]-\infty; -4] \end{array} \right.$

$$\boxed{2-a} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \in f(]-\infty; -4]) = ]-\infty; 7] \end{array} \right.$$

d'après le Thm des valeurs intermédiaires, l'éq  $f(x) = 0$  admet une solution dans  $]-\infty; -4]$ .

$\boxed{2-b} \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [1; 9] \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 \in f([1; 9]) = [-10; -2] \end{array} \right.$$

donc d'après T.V.I, l'éq  $f(x) = -3$  admet une solution dans  $[1; 9]$ .



Thm 2:

si  $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a; b] \\ f \text{ strictement monotone sur } [a; b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases}$

alors: l'équation  $f(x)=0$  admet une seule solution dans  $]a; b[$ .

EXEMPLE: Montrer que l'équation (E):  $4x^5 + x^3 + 2 = 0$  admet une seule solution dans  $] -1; 0[$

Réponse: posons:  $f(x) = 4x^5 + x^3 + 2$

•  $f$  est continue sur  $[-1; 0]$  (car polynôme)

•  $f'(x) = 20x^4 + 3x^2 \geq 0$  donc  $f$  est strictement  $\nearrow$  sur  $[-1; 0]$ .

$$\begin{cases} f(0) = 4 \times 0 + 0 + 2 = 2 > 0 \\ f(-1) = -4 - 1 + 2 = -3 < 0 \end{cases}$$

donc:  $f(0) \times f(-1) < 0$

donc d'après T.V.I l'éq: (E) admet une seule solution dans  $] -1; 0[$ .

## V. Fonction réciproque الدالة العكسية

Déf: Toute fonction  $f$  continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , admet une fonction réciproque notée  $f^{-1}$  définie sur  $J = f(I)$  et à valeur dans  $I$ :

$$I \xrightarrow{f} J = f(I) \xrightarrow{f^{-1}} I$$

et on a:  $(\forall x \in J) (\forall y \in I) \quad f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$ .

EXEMPLE:  $f(x) = 3x^2 - 5$ ;  $I = [1; 4]$

1°/ Mq  $f$  admet une fct réciproque définie sur  $J$ .

2°/ Déterminer  $J$  et calculer  $f^{-1}(-2)$ ;  $f^{-1}(43)$ .

on a:  $\forall x \in I = [1; 4]$ ;  $f'(x) = 2 \times 3x = 6x > 0$

donc  $f$  est strictement  $\nearrow$  sur  $I$  et continue

donc  $f$  admet une fonction réciproque définie sur  $J = f(I)$ .

2°/ on a  $f$  est  $\nearrow$  sur  $I$  donc ;

$$J = f(I) = f([1; 4]) = [f(1); f(4)] = [-2; 43]$$

calcul de  $f^{-1}(-2)$  et  $f^{-1}(43)$

on a :  $f(1) = -2 \Leftrightarrow 1 = f^{-1}(-2)$

$$f(4) = 43 \Leftrightarrow 4 = f^{-1}(43)$$

(car dans la définition on a :  $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$ )

Proposition :

...  $f^{-1}$  est continue sur  $J = f(I)$

... si  $f$  est strictement  $\nearrow$  sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est strictement  $\nearrow$  sur  $J = f(I)$ .

... ( $f$  est str  $\searrow$  sur  $I$ )  $\Rightarrow$  ( $f^{-1}$  est str  $\searrow$  sur  $f(I)$ )

Dans un repère orthonormé ;  $(\mathcal{E}_f)$  et  $(\mathcal{E}_{f^{-1}})$  sont symétriques par rapport à la droite :  $(\Delta) : y = x$ .

